Clase 1: Asuntos Básicos

Peter Hummelgens

10 de diciembre de 2006

1. Soporte de una función.

Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto, entonces se obtiene la clausura $\bar{A}$ de A en $\mathbb{R}$ agregando a A todos sus puntos de acumulación (o puntos límites). Así $\bar{A}$ siempre es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}$.

Ejemplo 1.

$$\overline{(0;1)} = \overline{(0;1]} = \overline{[0;1)} = [0;1], \quad \overline{(-\infty;1)} = (-\infty;1], \quad \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R},$$

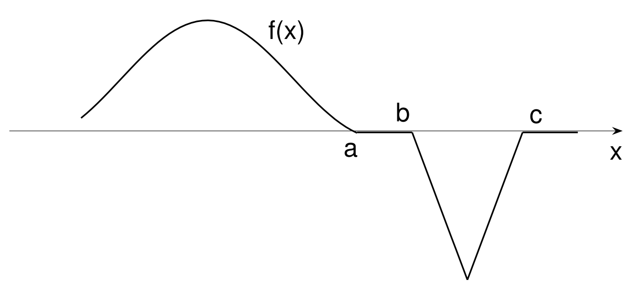
$$\overline{\{-1,0,3\}} = \{-1,0,3\}, \quad \overline{\left\{\frac{1}{n} \mid n = 1,2,3,\cdots\right\}} = \left\{0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots\right\},$$

$$\overline{[-3;1) \cup (2,3)} = [-3;1] \cup [2;3]$$

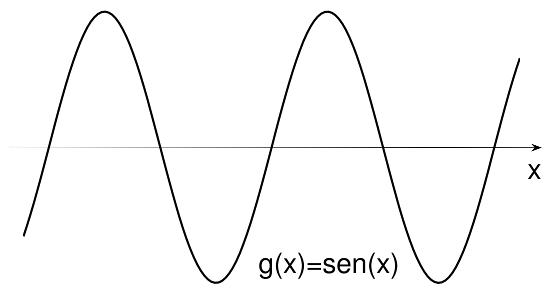
Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ continua, entonces el soporte de f es por definición

$$sop(f) := \overline{\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}} \quad \text{(siempre un conjunto cerrado).}$$

Por ejemplo:



$$sop(f) = (-\infty; a] \cup [b; c].$$

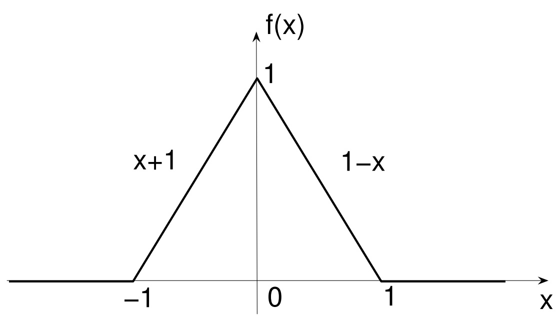


$$sop(g) = \mathbb{R}.$$

Un conjunto cerrado y acotado en $\mathbb{R}$ se llama un compacto en $\mathbb{R}$. En las figuras anteriores f y g no son de soporte compacto, pero

$$h(x) = \begin{cases} 0; & x < -1 \\ 1+x; & -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x; & 0 \leq x \leq 1 \\ 0; & x > 1 \end{cases}$$

sí es de soporte compacto, $sop(h) = [-1; 1]$.



Observe

$$f \text{ es de soporte compacto} \Longleftrightarrow f(x) = 0 \text{ fuera de algún compacto.}$$

2. Espacios vectoriales de funciones.

Sea V el conjunto de todas las funciones $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ (advertencia: en este curso las funciones pueden tomar valores complejos en general). Para $f, g \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}$ definimos $f+g$, $\lambda f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ (es decir $f+g$, $\lambda f \in V$) por

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &:= f(x)+g(x),\ x \in \mathbb{R}\\ (\lambda f)(x) &:= \lambda f(x),\ x \in \mathbb{R}\end{aligned} \tag{1}$$

(esto es nada nuevo: bachillerato). Con las operaciones (1) V es un espacio vectorial (complejo) cuyos elementos (vectores) son funciones $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Que V es un espacio vectorial significa que podemos aplicar todas las reglas algebraicas usuales, como

$$f+g = g+f,\ f+(g+h) = (f+g)+h := f+g+h \text{ (no hace falta poner paréntesis)},$$

$$\lambda(f+g) = \lambda f + \lambda g,\ \lambda(\mu f) = (\lambda\mu)f,\ f+0 = f \text{ (donde 0 es la función } \mathbb{R} \longrightarrow \{0\}),$$

$$f - f = 0, \cdots \text{ etc.}$$

En general trabajaremos con subconjuntos $W \subseteq V$ de funciones con propiedades especiales: continuas, diferenciables, integrables,$\cdots$ etc. Del algebra lineal tenemos un criterio fácil para verificar que $W \subseteq V$ es también un espacio vectorial bajo las mismas operaciones (1):

Para que $W \subseteq V$ sea un espacio vectorial es necesario y suficiente que

$$f, g \in W,\ \lambda \in \mathbb{C} \implies f+g,\ \lambda f \in W. \tag{2}$$

Decimos entonces que W es un subespacio lineal de V.

Ejemplo 2.

(a) $C(\mathbb{R})$ *: todas las funciones continuas en* $\mathbb{R}$*,* $C^k(\mathbb{R})$ $(1 \leq k < \infty)$*: las funciones* k *veces diferenciables con continuidad,* $C^\infty(\mathbb{R})$ *: las funciones infinitas veces diferenciables (no hace falta agregar "con continuidad" ya que diferenciable* $\Longrightarrow$ *continua). Tenemos entonces los espacios* $C^k(\mathbb{R})$ $(0 \leq k \leq \infty)$*, donde* $C^0(\mathbb{R}) = C(\mathbb{R})$*. Es fácil verificar (2) con* $W = C^k(\mathbb{R})$*, de modo que* $C^k(\mathbb{R})$ $(0 \leq k \leq \infty)$ *es un espacio vectorial.*

(b) $C_0^k(\mathbb{R})$ $(0 \leq k \leq \infty)$*: las funciones* $f \in C^k(\mathbb{R})$ *con sop*(f) *compacto. Es fácil verificar (2)con* $W = C_0^k(\mathbb{R})$*, de modo que*

$$C_0^k(\mathbb{R})\ (0 \leq k \leq \infty) \text{ \emph{es un espacio vectorial.}}$$

Notación (de L. Schwartz): $\mathcal{D}(\mathbb{R}) = C_0^\infty(\mathbb{R})$, un espacio fundamental para este curso, llamado el espacio de las funciones de prueba.

Ejemplo 3. *(a)* $L^1(\mathbb{R})$*: las funciones* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ *tales que existe* $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx$. *Para verificar que* $L^1(\mathbb{R})$ *es un espacio vectorial observamos primero la desigualdad triangular*

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|,$$

luego

$$\begin{aligned} f, g \in L^1(\mathbb{R}) \implies \int_{-\infty}^{\infty} |(f+g)(x)|dx &\stackrel{(1)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) + g(x)|dx \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx + \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|dx \end{aligned}$$

existe ya que existen $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx$ *y* $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|dx \implies f+g \in L^1(\mathbb{R})$. *Además, con* $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |(\lambda f)(x)|dx \stackrel{(1)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} |\lambda f(x)|dx = |\lambda| \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx$$

existe $\implies \lambda f \in L^1(\mathbb{R})$. *Con esto verificamos (2) con* $W = L^1(\mathbb{R})$. *El espacio* $L^1(\mathbb{R})$ *se llama el espacio de las funciones absolutamente integrables.*

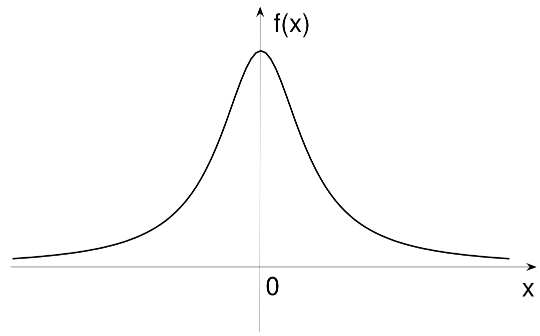
(b) $L^1_{loc}(\mathbb{R})$*: Las funciones* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ *tales que existe* $\int_K |f(x)|dx$ *para todo compacto* $K \subset \mathbb{R}$. *A este espacio lo llamaremos el espacio de las funciones localmente integrables ("localmente", es decir, sobre todo compacto). Es claro que* $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ *es un espacio vectorial. Observemos:*

$$C_0^k(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R}) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R}) \ \ (0 \leq k \leq \infty)$$

$$C^k(\mathbb{R}) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R}) \ \ (0 \leq k \leq \infty).$$

(c) Veamos algunos ejemplos concretos:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \ -\infty < x < \infty.$$

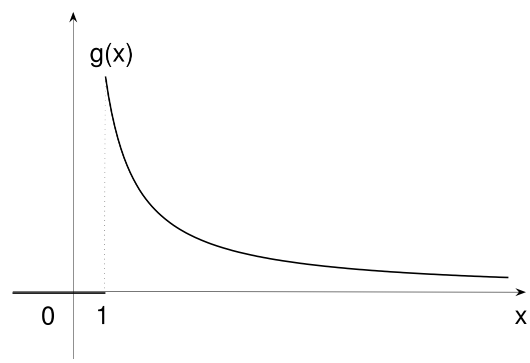


Tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = [\arctan x]_{-\infty}^{\infty} = \pi,$$

existe $\Longrightarrow f \in L^1(\mathbb{R})$.

$$g(x) = \begin{cases} 0; & x < 1 \\ \dfrac{1}{x}, & x > 1 \end{cases} .$$

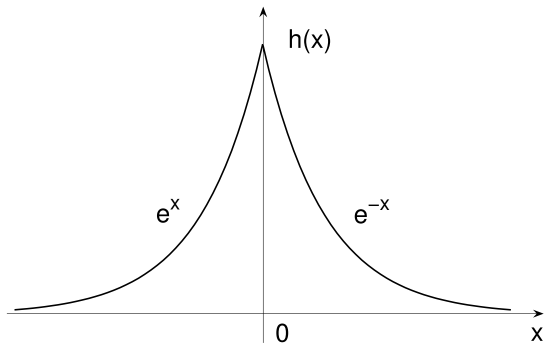


Tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|dx = \int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x} = [\ln x]_1^{\infty} = \ln\infty = \infty,$$

no existe $\Longrightarrow g \notin L^1(\mathbb{R})$, *pero evidentemente* $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

Sea $h(x) = e^{-|x|}$, $-\infty < x < \infty$.



Verifique que $h \in L^1(\mathbb{R})$.

3. Funcionales lineales.

Sea V un espacio vectorial complejo. Un funcional lineal sobre V es por definición una aplicación lineal $T : V \longrightarrow \mathbb{C}$, es decir

$$\begin{aligned} T(f+g) &= T(f) + T(g) \\ T(\lambda f) &= \lambda T(f) \end{aligned} \tag{3}$$

para todo $f, g \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Introducimos la notación de corchete $\langle \ , \ \rangle$:

$$\langle T, f \rangle = T(f).$$

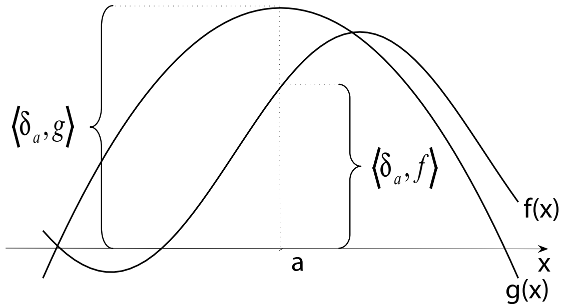
Con esta notación (3) dice que

$$\begin{aligned} \langle T, f+g \rangle &= \langle T, f \rangle + \langle T, g \rangle \\ \langle T, \lambda f \rangle &= \lambda \langle T, f \rangle \end{aligned} \tag{4}$$

Siguen 2 ejemplos fundamentales:

Ejemplo 4. *Sea* $a \in \mathbb{R}$ *arbitrario fijo. Entonces definimos*

$$\begin{aligned} &\delta_a : C(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C} \quad \textit{por} \\ &\langle \delta_a, f \rangle := f(a), \ f \in C(\mathbb{R}). \end{aligned} \tag{5}$$



Podemos llamar δ_a un <u>operador de evaluación</u> (δ_a <u>evalúa</u> cualquier $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ continua en $x = a$). Veamos que δ_a <u>es un funcional lineal</u>. Para $f, g \in C(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{C}$ tenemos

$$\langle \delta_a, f+g\rangle \overset{(5)}{=} (f+g)(a) \overset{(1)}{=} f(a) + g(a) \overset{(5)}{=} \langle \delta_a, f\rangle + \langle \delta_a, g\rangle,$$

$$\langle \delta_a, \lambda f\rangle \overset{(5)}{=} (\lambda f)(a) \overset{(1)}{=} \lambda f(a) \overset{(5)}{=} \lambda \langle \delta_a, f\rangle,$$

y así verificamos (4) con $T = \delta_a$. El funcional lineal δ_a se llama <u>la delta de Dirac centrada en $x = a$</u>. Los físicos hablan de la "función delta", lo que es <u>incorrecto</u>: δ_a <u>no es</u> una función sino un <u>funcional</u>. Escribimos simplemente δ en lugar de δ_0.

Ejemplo 5. *Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ fijo. Definimos*

$$\begin{aligned} &T_f : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C} \quad \textit{por} \\ &\langle T_f, \varphi\rangle := \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx, \ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}). \end{aligned} \tag{6}$$

Como $sop(\varphi) = K$ es compacto, $sop(f\varphi) \subseteq K$ también es compacto (un subconjunto cerrado de un compacto es compacto), es decir $f(x)\varphi(x) = 0$ fuera de algún compacto y por lo tanto la integral en (6) realmente <u>no</u> es una integral impropia sino es una integral sobre un intervalo compacto, <u>por lo tanto existe</u>, de modo que $\langle T_f, \varphi\rangle$ está bien definido para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Veamos que T_f <u>es un funcional lineal</u>. Para $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{C}$ tenemos

$$\begin{aligned} \langle T_f, \varphi + \psi\rangle &\underset{(6)}{\overset{(1)}{=}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)[\varphi(x) + \psi(x)]dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx + \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\psi(x)dx \\ &\overset{(6)}{=} \langle T_f, \varphi\rangle + \langle T_f, \psi\rangle, \end{aligned}$$

$$\langle T_f, \lambda\varphi\rangle \underset{(6)}{\overset{(1)}{=}} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda f(x)\varphi(x)dx = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx \overset{(6)}{=} \lambda\langle T_f, \varphi\rangle,$$

y así verificamos (4) con $T = T_f$.

4. El concepto "casi siempre".

Sean $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$. Decimos que f y g son casi siempre iguales ($f(x) = g(x)$ *c.s.* en $\mathbb{R}$) si, y sólo si, $f(x) = g(x)$ en $\mathbb{R}$ excepto posiblemente en un conjunto de medida cero, donde para los fines prácticos podemos entender como conjunto de medida cero un conjunto finito o infinito de puntos discretos (no queremos entrar en sutilezas matemáticas). En este caso seguramente, si $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\varphi(x)dx \text{ para todo } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Resulta que el inverso también es cierto:

Lema 1. *(Du Bois-Reymond) Si $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, entonces*

$$f(x) = g(x) \text{ c.s. en } \mathbb{R} \iff \langle T_f, \varphi\rangle = \langle T_g, \varphi\rangle \text{ para todo } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

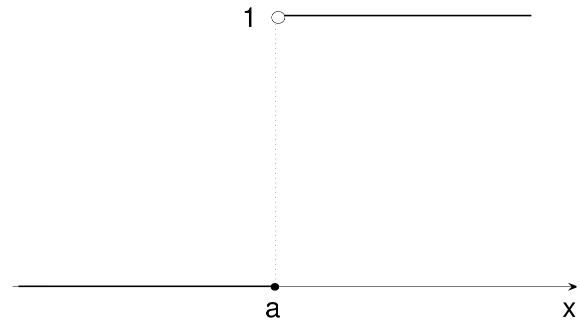
($\Longrightarrow$ es trivial, $\Longleftarrow$ es la afirmación importante). Conclusión: $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ definen el mismo funcional lineal $T_f = T_g : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \iff f(x) = g(x)$ c.s. en $\mathbb{R}$. Esta es una de las razones por la cual desde ahora y adelante considerarémos 2 funciones en $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ como la misma función cuando son iguales c.s. en $\mathbb{R}$ (son entonces idénticas como funcionales lineales).

Podemos entonces cambiar los valores de una función en un conjunto de medida cero y el resultado será "la misma función". Más aún podemos entonces dejar de definir una función en un conjunto de medida cero.

Ejemplo 6.

$$h_a(x) = \begin{cases} 0; & x \leq a \\ 1; & x > a \end{cases}$$

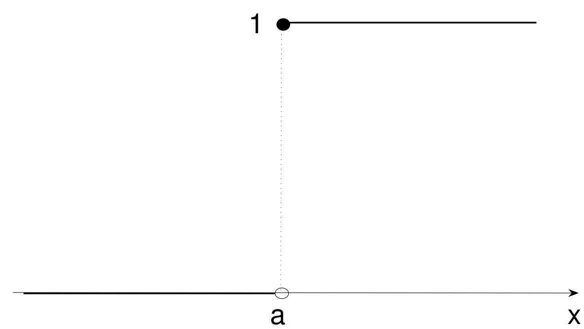
con gráfica



y

$$\widetilde{h}_a(x) = \begin{cases} 0; & x < a \\ 1; & x \geq a \end{cases}$$

con gráfica



definen la misma función en $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ *ya que*

$$h_a(x) = \widetilde{h}_a(x) \text{ c.s. en } \mathbb{R} \text{ (}\{a\}\text{ es un conjunto de medida cero).}$$

¿Cuál de las 2 definiciones es la más apropiada?. La pregunta es inútil: podemos dejar de definir la función en $x = a$ *y escribir*

$$h_a(x) := \begin{cases} 0; & x < a \\ 1; & x > a \end{cases},$$

así evitando discusiones interminables. La función h_a *se llama la función de Heaviside centrada en* $x = a$*. Escribimos* $h(x) = h_0(x)$*.*